E.N.S. Saint-Cloud et Fontenay 1985

## Option Sciences Naturelles

Durée : 3 heures

*Les deux parties sont indépendantes et seront traitées sur des feuilles séparées*

### I

Si $n$ et $p$ sont des entiers vérifiant la relation : $n \geqslant p \geqslant 0$, on pose $C_n^p = \dfrac{n!}{p!\,(n-p)!}$, avec la convention : $0! = 1$.

On considère :

— d'une part la série entière (S), de terme général :

$$\frac{x^n}{C_{2n}^n},\ (n \geqslant 0)\ ;$$

— d'autre part l'équation différentielle (E) :

$$x(x-4)\frac{dy}{dx} + (x+2)\,y = 2.$$

Si R est le rayon de convergence de la série entière (S), on désigne par $f(x)$ la somme de (S) sur $]-R, +R[$. On se propose de déterminer $f(x)$ à partir des solutions de (E).

1° Étude de (S).

*a.* Déterminer R.

*b.* Justifier le fait que $f$ est indéfiniment dérivable sur $]-R, +R[$.

Donner les valeurs de $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$.

*c.* Montrer que, sur $]-R, +R[$, $f$ est solution de (E).

2° Étude de (E) sur l'intervalle $]0, 4[$.

*a.* Déterminer la solution générale de (E) sur $]0, 4[$ ; le changement de variable $t = \sqrt{\dfrac{4-x}{x}}$ pourra être utile en fin de résolution.

*b.* Montrer que toute solution de (E), sur $]0, 4[$, tend vers 1, lorsque $x$ tend vers zéro par valeurs supérieures.

*c.* Déterminer la fonction $g$, solution de (E) sur $]0, 4[$, pour laquelle le rapport $\dfrac{g(x)-1}{\sqrt{x}}$ tend vers zéro, lorsque $x$ tend vers zéro par valeurs supérieures.

*d.* Démontrer que, pour tout réel $u$ appartenant à $]0, +\infty[$, on a la relation : $\operatorname{Arc\,tg} u + \operatorname{Arc\,tg}\dfrac{1}{u} = \dfrac{\pi}{2}$ ; cette relation pourra être utilisée pour écrire $g(x)$ sous la forme :

$$g(x) = \frac{4}{4-x}\left(1 + \sqrt{\frac{x}{4-x}}\ \operatorname{Arc\,tg}\sqrt{\frac{x}{4-x}}\right).$$

*e.* Déterminer, lorsque $x$ tend vers zéro par valeurs supérieures, la limite du rapport $\dfrac{g(x)-1}{x}$, à partir de l'expression de $g(x)$ donnée ci-dessus.

3° Étude de (E) sur $]-\infty, 0[$.

*a.* Déterminer la solution générale de (E) sur $]-\infty, 0[$.

*b.* Montrer que toute solution de (E), sur $]-\infty, 0[$, tend vers 1, lorsque $x$ tend vers zéro par valeurs inférieures.

*c.* Déterminer la fonction $h$, solution de (E) sur $]-\infty, 0[$, pour laquelle le rapport $\dfrac{h(x)-1}{\sqrt{-x}}$ tend vers zéro, lorsque $x$ tend vers zéro par valeurs inférieures.

*d.* Déterminer la limite du rapport $\dfrac{h(x)-1}{x}$, lorsque $x$ tend vers zéro par valeurs inférieures.

4° Somme de (S).

*a.* Donner, en la justifiant, l'expression de $f(x)$.

*b.* Calculer $\displaystyle\sum_{n>0} \frac{1}{C_{2n}^n}$ et $\displaystyle\sum_{n>0} \frac{(-1)^n}{C_{2n}^n}$.

## II

Il s'agit, dans ce problème, de reconstruire un modèle probabiliste connu par ses applications en thermodynamique.

### 1° Calculs préliminaires.

On pose $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t^2}\, dt$, où $n$ est un entier positif ou nul.

*a.* Calculer $I_0$ et $I_1$.

*b.* Établir une relation de récurrence entre $I_{n+2}$ et $I_n$ ; en déduire $I_2$, $I_3$ et $I_4$.

### 2° Modèle.

On considère trois variables aléatoires à valeurs réelles, X, Y et Z, indépendantes et de même loi ; $a$ étant un paramètre réel strictement positif, cette loi est définie par la densité de probabilité :

$$f : t \longmapsto \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2a^2}, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

*a.* Démontrer que la densité de probabilité $g$ de la variable aléatoire $U = \sqrt{X^2 + Y^2}$ a pour expression :

$$g : \begin{cases} u \longmapsto 0 & , \text{ si } u \leqslant 0 \\ u \longmapsto \dfrac{u}{a^2} e^{-u^2/2a^2}, & \text{si } u > 0. \end{cases}$$

*b.* Démontrer que la densité de probabilité $h$ de la variable aléatoire $V = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = \sqrt{U^2 + Z^2}$ a pour expression :

$$h : \begin{cases} v \longmapsto 0 & , \text{ si } v \leqslant 0 \\ v \longmapsto \dfrac{2v^2}{a^3\sqrt{2\pi}} e^{-v^2/2a^2}, & \text{si } v > 0. \end{cases}$$

### 3° Application aux gaz parfaits.

Dans la théorie de MAXWELL, la vitesse d'une molécule, de masse $m$, choisie au hasard dans un gaz parfait à la température T, est représentée par la variable aléatoire V, en posant $a = \sqrt{\dfrac{k\,T}{m}}$ où $k$ est la constante de BOLTZMANN.

*a.* Calculer, en fonction de $k$ et des paramètres $m$ et T, l'espérance de V.

*b.* Calculer de même, avec deux méthodes différentes, l'espérance de la variable aléatoire $\frac{1}{2}\, m\, V^2$.

### 4° Application au mélange de deux gaz parfaits.

Toujours à la même température T, on considère un mélange de deux gaz parfaits contenant des molécules de masse $m_1$ ou $m_2$ dans les proportions respectives $p$ et $1 - p$. Soit W la variable aléatoire représentant la vitesse d'une molécule choisie au hasard dans le mélange.

*a.* Déterminer la densité de probabilité de W que l'on exprimera, pour simplifier, en posant $\alpha = \sqrt{\dfrac{k\,T}{m_1}}$ et $\beta = \sqrt{\dfrac{k\,T}{m_2}}$.

*b.* Calculer, en fonction de $k$ et des paramètres $p$, T, $m_1$ et $m_2$, l'espérance de la variable aléatoire $W^2$.

---